

Hex



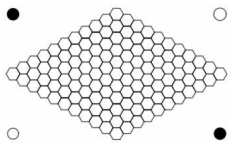
Ludus

História:

O Hex foi inventado duas vezes. A primeira, pelo cientista e poeta dinamarquês Piet Hein, em 1942, a segunda, pelo matemático americano John Nash, em 1948. Contudo, foi Martin Gardner, nas páginas do Scientific American, que o popularizou nos anos 50 ([5]). Hoje o Hex está a tornar-se cada vez mais popular, sendo muito estudado, já lhe foi dedicado um livro, por Cameron Browne, que mais tarde escreveu outro sobre jogos da mesma família ([2, 3]).

Material:

O Hex é um jogo de conexão, habitualmente jogado num tabuleiro como este:



Com 60 peças brancas e 60 peças negras.

Definições:

Adjacência - duas peças dizem-se adjacentes se os hexágonos que ocupam partilham uma aresta.

Grupo - um conjunto de peças adjacentes da mesma cor.

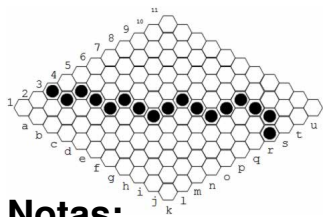
Regras:

Há dois jogadores, Branco e Negro, que alternam colorindo um hexágono do tabuleiro ou colocando uma peça da sua cor numa célula hexagonal. Vale a regra do equilíbrio, ie, na sua primeira jogada, o segundo jogador pode escolher entre trocar de cores (mantendo a primeira jogada do adversário) ou jogar normalmente.

Objectivo:

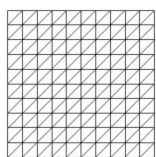
As Brancas tentam construir um grupo entre as margens SO e NE, as Negras ligam SE a NO.

Um grupo que daria a vitória às Negras:



Notas:

O jogo equivalente de Nash joga-se nas intersecções de um tabuleiro como este:



Um jogador liga N-S, colocando peças da sua cor nas intersecções, o outro tenta a ligação E-O.

O primeiro facto notável sobre este jogo é que ele não permite empates.

Suponha que o tabuleiro está completamente preenchido com peças de duas cores, aleatoriamente. Interpretemos as peças brancas como representando água e as negras como

terra firme. Então, das duas uma: ou a água flui entre as margens SO e NE, ou há um dique a unir as margens SE e NO.

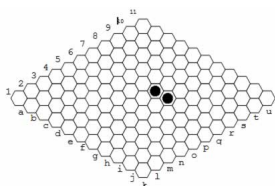
Neste último caso ganharam as Negras, no primeiro as Brancas. A ausência de empates torna o Hex um jogo mais interessante ainda de jogar.

O argumento acima é intuitivo, claro, mas a prova rigorosa não é difícil.

Como nenhum jogo de Hex pode terminar empatado, o jogo deve poder ser ganho sempre pelo primeiro ou sempre pelo segundo jogador, se ambos jogarem perfeitamente. Suponha que é o segundo jogador que dispõe de uma estratégia vencedora. Então, o primeiro, na sua primeira jogada, pode jogar aleatoriamente e passar a encarar-se como sendo o segundo. Como um lance a mais, num jogo de conexão, nunca pode penalizar, o primeiro jogador vai ganhar, usando a estratégia vencedora do segundo. Obtivemos uma contradição. A conclusão é então que é o primeiro jogador que tem uma estratégia vencedora.

Este argumento foi utilizado por John Nash e ficou conhecido por argumento do roubo da estratégia. Prova a existência de uma estratégia ganhante, mas não a exhibe. Conhecem-se explicitamente estratégias vencedoras para o primeiro jogador para tabuleiros pequenos (até 7×7). Para a dimensão habitual, 11×11 , permanece desconhecida. Contudo, abrir com um lance na diagonal menor é muito forte, desequilibrando o jogo. É esta vantagem do primeiro que justifica a regra do equilíbrio. Desta forma o primeiro jogador tentará não jogar muito forte no seu primeiro lance.

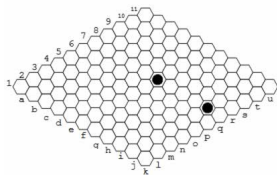
Como o Hex é um jogo de conexão, importa saber como estender um grupo. Jogar numa casa contígua parece demasiado lento.



Aqui as peças em l7 e m7 estão demasiado perto uma da outra, pouco ajudando na ligação

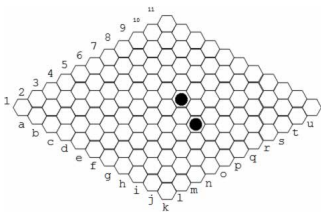
das margens.

Por outro lado, um salto demasiado longo permite a intromissão do adversário:



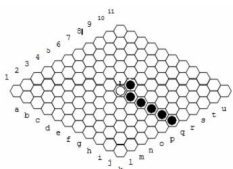
Neste caso, as peças l7 e p7 podem ser separadas se as Brancas jogarem n7.

Um exemplo de uma boa ligação, que não é demasiado ambiciosa, é a ponte, que consiste em duas peças que partilham duas casas vizinhas:

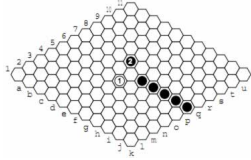


Aqui, se as Brancas tentam cortar, jogando l6, as Negras replicam em m7, e se as Brancas jogam m7, as Negras respondem l6. As duas peças estão virtualmente ligadas uma com a outra.

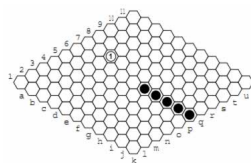
Os movimentos defensivos também merecem reflexão. Por exemplo, ao tentar bloquear um grupo adversário não devemos jogar muito próximo dele, porque isso permite extensões imediatas:



A tentativa de bloqueio k6 obtém a resposta l7. Até à distância de uma ponte o bloqueio fraqueja:



Se as Brancas jogam j5, as Negras respondem com k7. As boas jogadas estão muitas vezes à distância:



David Gale ([4]) descobriu uma ligação surpreendente do resultado, visto acima, da ausência de empates no Hex, com um teorema da matemática avançada. Ele provou que ele é equivalente ao teorema do ponto fixo de Brower, que é um resultado sofisticado em matemática, afirmando que, sob certas hipóteses, uma função f tem um ponto fixo (ie, existe um x tal que $f(x) = x$). Pode ler sobre isto também em ([1]).

Referências:

- [1] Binmore, K., Fun and Games, D. C. Heath and Co., 1992.
- [2] Browne, C., Hex Strategy: Making the Right Connections, A. K. Peters, 2000.
- [3] Browne, C., Connection games, A. K. Peters, 2004.
- [4] Gale, David, W., “The game of Hex and the Brower fixed-point theorem”, American Math. Monthly, Vol. 86, 1979, pp. 818–827.
- [5] Gardner, M., “The Game of Hex”, in The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, Simon and Shuster, New York, 1959, pp. 73–83.

